

# Angewandte Mathematik: Body & Soul Analyse eines neuen Verständnisses der Mathematik-Ausbildung

Prof. Dr. Thomas Risse  
Institut für Informatik & Automation  
Fakultät Elektrotechnik & Informatik, Hochschule Bremen

12.9.2008

## Zusammenfassung

Das dreibändige Werk *Erikson, Estep, Johnson: Angewandte Mathematik – Body and Soul* fordert mit seinem dezidiert anderen Verständnis der Mathematik-Ausbildung dazu heraus, sein spezielles Konzept darzustellen und zu überprüfen, inwieweit es seinem didaktischen Anspruch gerecht wird.

Unabhängig von den zwangsläufig subjektiven Ergebnissen dieses Abgleiches macht die Analyse aber in jedem Fall die eigene didaktische Position zwischen Formalisten und Konstruktivisten deutlich und trägt so zum Überdenken der eigenen Art, Mathematik zu lehren, bei.

## 1 Einführung

Es gibt viele Lehrbücher der höheren Mathematik,

- für jeden Geschmack, d.h. von rein bis angewandt, mehr oder weniger diskret, mehr oder weniger numerisch orientiert, praktisch bis unpraktisch, eher streng formal oder eher locker, komprimiert bis weitschweifig.
- für jedes Niveau, d.h. for dummies, Studienanfänger, Fortgeschrittene
- für jede Zielgruppe, d.h. für Mathematiker, Ingenieure, Physiker usw.
- für den Gebrauch an FOS, FH oder Universität

M.E. ist das dreibändige Werk B&S [1], [2], [3] so ungewöhnlich, daß sich eine Auseinandersetzung mit seinem ganz speziellen Selbstverständnis, wie es in identischer Weise in jedem Band ab S. IX dargelegt ist, lohnt.

- Integration von Mathematik, Informatik und Anwendungen aus allen Naturwissenschaften
- konstruktive Lösung von algebraischen Gleichungen und Differentialgleichungen
- Verwendung von MATLAB/Maple
- Behandlung von Phänomenen wie Wärmeleitung, Wellenausbreitung, Elastizität, Strömungen, Diffusion usw. schon in frühesten Stadien der Mathematik-Ausbildung
- (trotzdem) Vermittlung der traditionellen Einsichten und Sätze aus linearer Algebra und (mehrdimensionaler) Analysis

B&S teilt den Anspruch der Verbindung von Theorie und Praxis wie auch die Unterstützung durch Einsatz von Computeralgebra-Systemen mit anderen Werken, z.B. [11], [12], die Konstruktivität mit jedem algorithmisch, z.B. [4], oder numerisch, z.B. [9], orientierten Lehrbuch, die Verwendung von MATLAB für Algebra und Analysis mit z.B. [14], [19] oder endlich die Entwicklung die Mathematik aus den Problemstellungen heraus mit z.B. [6] und [7].

Im Unterschied zu den genannten Beispielen zeichnet sich B&S jedoch durch eine ganz eigene 'Philosophie' aus:

- statt qualitativ besser quantitativ
- statt möglichst allgemein lieber praktisch bedeutsam
- statt Aneinanderreihung von Satz-Beweis-Paaren besser Folgen von Idee-Hypothese-Schlußfolgerung-Satz

Diese 'Ideologie' verwendet beispielsweise

- statt des 'störenden Grenzwertes' in der Definition von Stetigkeit lieber Lipschitz-Stetigkeit,

- statt des Differentialquotienten, also statt des Grenzwertes des Differenzenquotienten lieber den Umstand, daß differenzierbare Funktionen lokal näherungsweise linear sind
- statt Grenzwerten wo immer möglich Cauchy-Folgen.

Der ganzheitlich Anspruch von B&S wird vielleicht am besten in der Antwort auf die Frage *How to (not) organize a university* deutlich:

Traditional model: one department - one (differential) equation.  
 A new paradigm is now emerging:  
 With the development of a general methodology for solving differential equations during the last fifty years (the finite element method), the traditional model is now becoming obsolete and a new model building on interdisciplinary cooperation is emerging (e.g. the Finite Element Center).

B&S ist also nur ein Teil eines ganzheitlichen Projekts, das Entwicklung von Software und von Lehr- und Lernmaterialien umfaßt [16].

## 2 Analyse

Ich beziehe mich im Folgenden detailliert auf B&S, Band 1 – Ableitungen und Geometrie in  $\mathbb{R}^3$  und B&S, Band 2 – Integrale und Geometrie in  $\mathbb{R}^n$  und – aus Platzgründen – nur cursorisch auf B&S, Band 3 – Analysis in mehreren Dimensionen. Alle drei Bände sind durchgehend paginiert.

### 2.1 Ideologisches

Mir ist bewußt, daß ich B&S auf der einen Seite ideologische Fixierung vorwerfe und auf der anderen Seite ideologische Gefestigkeit einfordere, wenn eben doch nicht durchgängig konstruktivistisch ???

B&S nimmt einen dezidiert konstruktivistischen Standpunkt ein. Dies führt zu langwierigen Auseinandersetzungen etwa mit der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition von Grenzwerten mit m.E. fragwürdigem Nutzen. Folgen-Stetigkeit wird dann, wo nützlich, etwa bei einseitigen Grenzwerten, S. 229, sowieso verwendet.

- Was ist so verdammungswürdig an der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition von Grenzwerten?  
S. 186,230

- In irgendeinem Sinn S. 227 gibt es **nur** Lipschitz-stetige Funktionen – aber doch nicht so recht, weil etwa  $\sqrt{x}$  auf  $\mathbb{R}^+$  nicht Lipschitz-stetig sondern nur auf jedem Intervall  $(\delta, \infty)$  für  $\delta > 0$  und für verschiedene Lipschitz-Konstanten, S. 267 Lipschitz-stetig ist.
- Statt (nicht Lipschitz-stetiger) Sprungfunktion  $f(x) := a$  für  $x < \bar{x}$  und  $f(x) := b$  für  $x \geq \bar{x}$  lieber zwei Lipschitz-stetige Funktionen  $f_{\text{links}}(x) := a$  für  $x \leq \bar{x}$  und  $f_{\text{rechts}}(x) := b$  für  $x \geq \bar{x}$  mit **konkurrierenden** Werten in der Sprungstelle! S. 228/229
- $\mathbb{R}$  ist möglich, S. 252,255,  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existieren aber so recht nicht, S. 255.
- Das Integral wird als Stammfunktion eingeführt und nicht – anschaulicher? konstruktiver? – als Riemann-Integral – mit dem Nachteil, daß eben nur das Riemann-Integral 'natürliche Verallgemeinerungen' zu Doppel- und Mehrfachintegralen zuläßt S. 475. Und natürlich werden alle Quadratur-Verfahren aus dem Riemann-Integral abgeleitet, Kap. 34.
- Die Definitionen für die komplexen Versionen von exp, log, sin und cos fallen vom Himmel. Mangels komplexer Analysis können die Funktionen auch nicht als Lösungen von Differentialgleichungen definiert werden, S. 545. Komplexe Analysis bietet erst das Kap. 82 *Analytische Funktionen* im dritten Band.
- Wie üblich ist  $\int_A^B f(x) dx := \lim_{a \rightarrow A, b \rightarrow B} \int_a^b f(x) dx$  für  $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und/oder  $B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Wo bleibt in Kap. 36 die Konstruktivität?
- *Die harmonische Reihe divergiert theoretisch*, S. 583, obwohl doch der Beweis der Divergenz ein konstruktives Verfahren für die praktische Summation (summiere Teilsummen mit  $2^n$  Summanden durch rekursives Summieren von Teilteilsammen) aufzeigt, S. 585.
- Phasendarstellung ohne Konstruktion, S. 601

Vor lauter Bemühung um Vermeidung von Allzutechnischem passieren dann aber auch echte Lapsi, wie z.B. die Aussagen

*Ist  $\det(A)$  klein, dann sind die Spalten fast linear abhängig und die Eindeutigkeit der Lösung von  $Ax = 0$  ist in Gefahr.  
Eine Matrix ist fast singulär falls ihre Determinante nahezu Null ist.*

die sofort durch Vielfache  $c\mathbf{I}$  der Identitätsmatrix  $\mathbf{I}$  mit  $\det(c\mathbf{I}) = c^n \det(\mathbf{I}) = c^n$  für  $|c| \ll 1$  widerlegt werden, S. 656. Die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{A})$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  wird übrigens erst auf S. 694 eingeführt.

Oder es wird einfach *angenommen*, daß die Eigenwerte symmetrischer, positiv definiter Matrizen positiv sind, S. 696.

Auch die Möglichkeit Integration und Differentiation zu vertauschen, von der in Kap. 47 *Lagrange und das Prinzip der kleinsten Wirkung* reichlich Gebrauch gemacht wird, verdient keinerlei Erwähnung und wird erst am Ende von Kap. 54 gerechtfertigt.

B&S und künstliche Intelligenz, S. 628

## 2.2 Leserorientierung

- Die Autoren ermutigen und ermuntern ihre Leser/Leserinnen, S. 737, 776, und sind empathisch, S. 834, 836.
- Sie sind nahe bei ihren Lesern, wenn sie etwa darauf verweisen, daß das Aufstellen einer Formel und ihr Beweis durch Induktion zwei Paar Stiefel sind.
- Sie regen den Leser zur Stellungnahme, S. 230, 254, 775 an, fordern Anerkennung cleverer Ideen, S. 502, 565 ein oder unterstreichen die Überzeugungskraft einfacher Argumente, S. 399.
- geben Lesehilfen, S. 742, 793, 823
- Achtung aufpassen, S. 838
- um strikt dezimal anschauliche Aussagen machen zu können, verallgemeinern sie den Bisektions- zum Dekasektionsalgorithmus, S. 209
- anschauliche Vergleiche, z.B. S. 71, 847
- Jedes Kapitel bietet interessante Aufgaben, allerdings ohne Lösungen. Einige Aufgaben sind als *schwierig* gekennzeichnet.

Man kann darüber streiten, ob es hilfreich und nützlich ist, Vektoren und Matrizen so wie Skalare zu schreiben, S. 296/297. M.E. verbessert die typographische Unterscheidung die Lesbarkeit und erleichtert damit, den Text zu verstehen, vgl. etwa [9], [18]. Dann wären auch einige Lesehilfen verzichtbar, S. 823.

- Hilfreich wären Quantoren auf S. 782
- Hilfreich wäre ein Hinweis auf die Zulässigkeit der Vertauschung von Integration und Differentiation, S. 789.
- Hilfreich wäre zu erklären, warum positiv definite Matrizen invertierbar sind, S. 797.
- fragwürdige Aussagen vermeiden, S. 797
- Hilfreich wären Klammern unterschiedlicher Größe, z.B. S. ???

Es wäre sicher hilfreich wenn nicht gar unumgänglich, Begriffe wie implizieren, Fakultät, rekursive Definitionen, inhomogene Differentialgleichung, glatte Funktionen, eins zu eins Abbildungen, (nicht-) normale Matrizen, genügend glatt und ??? explizit einzuführen, S. 56, 411, 566, 572, 651, 726, 789. Auch Erklärungen in Alltagssprache wie 'knotige Massenmatrix  $\hat{M}$ ' bedürfen unbedingt der Erläuterung, S. 784.

M.E. sind Vorgriffe, die nicht als solche gekennzeichnet sind, zu vermeiden, beispielsweise

- Verwendung von Indizes in Kap. 4, Einführung von Indizes in Kap. 6, S. 74
- Verwendung von Koordinaten, S. 103, Einführung von Koordinaten, S. 110/111
- Verwendung von Funktionen wie  $x(t)$  oder  $f(x(t), t)$ , Kap. 4, wie  $\sin(x)$  oder  $\cos(x)$ , Kap. 8, Einführung von Funktionen in Kap. 9
- die Herleitung von  $D \sin(x) = \cos(x)$  S. 444, wo doch die Lösung der Differentialgleichung  $u'' + u = 0$  nur *in die Welt der trigonometrischen Funktionen führt*.
- Koeffizientenvergleich ohne Identitätssatz für Polynome, S. 553/554
- Flächen- und Volumenintegrale auf S. 575 des zweiten Bandes, die erst ab S. 981 des dritten Bandes eingeführt werden
- Bestimmung von Eigenvektoren mit Hilfe der Minimierung der Rayleigh-Quotienten, S. 677, sowie Bestimmung der Lösung von  $Ax = b$  mit Hilfe der Minimierung von  $F(y) = \frac{1}{2}(Ay, y) - (b, y)$ , S. 693 im zweiten Band, obwohl die zugehörigen (konstruktiven) Verfahren erst im Kap. 60 *Optimierung* ab S. 909 im dritten Band bereitgestellt werden

Appetizer wie *Riskieren Sie einen Blick auf die Weierstraß-Funktion*, nämlich ab S. 1218 im dritten Band auf S. 268 im ersten Band wie ebenso dort der Hinweis auf *Turbulente Strömungen* im allerletzten Kapitel *Navier-Stokes-Gleichungen* des dritten Bandes sind unangebracht. Im Kap. 44 *Lösung linearer Gleichungssysteme* im zweiten Band wird ständig auf *2-Punkte Randwert-Probleme ohne Konvektion*, *parabolische Probleme* und *Steifigkeitsmatrizen* verwiesen, wenngleich diese Themen erst im Kap. 77 *FEM für Randwertprobleme im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$*  im dritten Band behandelt werden.

### 2.3 Schwedische Spezialitäten

Als schwedische Spezialitäten gefallen Polhems Maschine für Uhrenzahnäder, Scheutz' Differenzenmaschine, Odhners mechanischer Rechner, Ulf Lundquists Assar-Cartoons, Volvos, J.P. Johanssons Zangen, Sonya Kovalesvska-ya, Gründung der Universität Chalmers, Königin Christina, Gösta Mittag-Leffler, Emanuel Swedenborg, Isolation schwedischer Häuser, Tycho Brahe usw., S. 4/5, 8, 9, 21, 39, 183/184, 196/197, 222, 334/335, 378/379, 401/402, 800, 896/897.

Launige Zitate, Kurzweiliges zur (mathematischen) Geistesgeschichte, biographische Anekdoten, häufig amüsante Mottos zu jedem Kapitel, Irrungen und Wirrungen etwa der Astronomie

### 2.4 Übersetzung und Lektorat

- Die Übersetzung weist sprachliche Defizite z.B. S. 157, 252, 256, 587, 694, 750 sowie Anglizismen z.B. S. 284, 472, 481, 788, 836 auf.
- Wie in jedem größeren Werk gibt es natürlich Tipp-Fehler. Im Fall eines Lehrbuches sind einige Tippfehler sehr ärgerlich, da sinnentstellende Fehler das Verständnis unnötig erschweren, S. 497, 552, 553, 567 oder den Leser zumindest verwirren S. 7, 184, 229, 283, 290, 306, 494, 525, 585, 587, 695, 702, 707/722, 790, 792. Andere Tippfehler sind offensichtlich und daher verschmerzbar, S. 247, 255, 277, 290, 353, 354, 594, 595, 627, 651, 690, 737, 738, 789, 796, 800.
- Verwendung von (Dezimal-) Kommata im Text und in Tabellen und von Dezimal-Punkten im 'schwedischen Dividieren', S. 65, in Abbildungen S. 84, 85, 138, 140, 148, 149, 182, 202, 228

- Spaltenvektoren werden (bewußt? vgl. S. ) nicht als solche geschrieben, S. 326, 362, 365, 645, 657, 719. wo doch Transponieren auf S. 648 eingeführt wird.
- Unklare oder schlampige Formulierungen finden sich auf S. 183, 237, 286, 297/298, 347, 436, 440, 486, 547.
- Die Begriffe *orthogonal* und *orthonormal* werden uneinheitlich verwendet, S. 367, ???.
- Offene 'Fragen' mit unklarer Absicht S. 376
- Laxheit im Umgang mit physikalischen Dimensionen z.B. S. 129, 393, 474 (vgl. dazu z.B. [10]) oder mit physikalischen Sachverhalten S. 540
- unglückliche Schreibweisen: Potenzen vs Größen eines 'Näherungsschrittes' wie  $x_i^n$  oder  $U^n(x)$ , Kap. 27, Kap. 44, 838-840
- unglückliche Schreibweisen: inverse vs reziproke Funktion S. 415-417, 537-540, 838-839
- Die inversen hyperbolischen Funktionen  $\operatorname{arsinh}$ ,  $\operatorname{arcosh}$ ,  $\operatorname{artanh}$  und  $\operatorname{arcoth}$  haben keinen Namen und sind mit  $\operatorname{arcsinh}$ ,  $\operatorname{arccosh}$ ,  $\operatorname{arctanh}$  und  $\operatorname{arccoth}$  zudem unglücklich bezeichnet, S. 539/540.
- Inkonsistente oder ungewöhnliche Bezeichnungen irritieren auf S. 600/603, in Kap. 48 aund auf S. 761, 762, 790.
- Die Bezeichnung der Multiplikation in Programmen, am besten doch wohl  $*$ , ist mit  $\cdot$  oder  $\times$  inkonsistent, S. 683, 686, 687, 691.
- Fachsprache S. 836, 851

### 3 zusammenfassende Bewertung

B&S nimmt für sich ein:

- Beispiele aus sehr vielen Anwendungsbereichen

B&S macht es dem Leser/der Leserin aber auch nicht immer einfach:

- manchmal zuviel Text, zuviele Worte



- Überfall-artig, gewöhnungsbedürftig

B&S ist nur was für Leser mit Muße und Spaß an Ganzheitlichkeit und etwa biographischen Exkursen. Insofern ist B&S schwierig zwischen [5] (kurz, knapp, Kochrezept) oder [8] (komprimiert) und [17] (mit ausführlichen Beispielen ausgearbeitet bis weitschweifig) einzuordnen.

Die Autoren sind natürlich von ihrer Sache überzeugt und machen deshalb auch sicher überzeugende Lehre. Jemand, der wie ich zwischen Faszination und Abwehr schwankt, kann unmöglich der reinen Lehre folgen und genau 'according to the book' vorgehen.

Anspruch 'früher' Anwendungen wird m.E. nicht eingelöst: erste Anwendungen in Kap. 26 *Galileo, Newton, Hooke, Malthus und Fourier*, also nach 430 Seiten. dafür ....

B&S beschränkt angewandte Mathematik im Wesentlichen auf die Behandlung von Differentialgleichungen. B&S behandelt damit keine Diskrete Mathematik, wie sie für Kryptographie, Graphen-theoretische Probleme, Probleme diskreter Optimierung usw. gebraucht wird. Daher wird der Leser auch mit Aussagen wie *Theoretisch gibt es natürlich kein größtes  $n \in \mathbb{N}$ , aber praktisch gilt  $n < 10^{100}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$* , S. 58, konfrontiert, die etwa in der Kryptographie wohl so nicht zutreffen.

Wünschenswert sind für jeden Band spezifische, vollständige (vgl. S. 550) Literaturhinweise, also z.B. unbedingt [15] zu Kap. 46 *Die Exponentialfunktion für Matrizen*, sowie wesentlich ausführlichere Sachverzeichnisse. (Der dritte Band enthält ein alle drei Bände umfassendes Sachverzeichnis.)

Abholen, wo Studierende stehen vs Sarrus  
ausgerechnet Cramer'sche Regel, wenn auch mit disclaimer S. 657/658, 720  
Folgen machen aus Unendlich Eins, S. 183

## Literatur

- [1] K. Erikson, D. Estep, C. Johnson: Angewandte Mathematik: Body and Soul – Band 1 – Ableitungen und Geometrie in  $\mathbb{R}^3$ ; Springer 2004
- [2] K. Erikson, D. Estep, C. Johnson: Angewandte Mathematik: Body and Soul – Band 2 – Integrale und Geometrie in  $\mathbb{R}^n$ ; Springer 2005
- [3] K. Erikson, D. Estep, C. Johnson: Angewandte Mathematik: Body and Soul – Band 3 – Analysis in mehreren Dimensionen; Springer 2005

- [4] Otto Forster: Algorithmische Zahlentheorie; Vieweg 1996
- [5] Peter Furlan: Das Gelbe Rechenbuch 1, 2, 3; Verlag Martina Furlan, Dortmund 1995
- [6] Georg Glaeser: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik; Elsevier 2005
- [7] Georg Glaeser: Der mathematische Werkzeugkasten – Anwendungen in Natur und Technik; Elsevier 2006
- [8] Klaus Habetha: Höhere Mathematik für Ingenieure und Physiker – Band 1, 2, 3; Klett 1976–1979
- [9] Michael T. Heath: Scientific Computing – An Introductory Survey; McGraw-Hill International Edition, 2<sup>nd</sup> edition 2002,
- [10] Rudolf Hilfer: Physik auf dem Computer – u.a. Mathematische Umformulierung, Entdimensionalisierung; Skriptum WS01/02, Universität Stuttgart [http://www.icp.uni-stuttgart.de/~hilfer/lehre/100-online/skriptum/html\\_book00](http://www.icp.uni-stuttgart.de/~hilfer/lehre/100-online/skriptum/html_book00)
- [11] A. Hoffmann, B. Marx, W. Vogt: Mathematik für Ingenieure – Lineare Algebra, Analysis – Theorie und Numerik; Pearson 2005
- [12] A. Hoffmann, B. Marx, W. Vogt: Mathematik für Ingenieure – Vektoranalysis, Integraltransformationen, Differenzialgleichungen, Stochastik – Theorie und Numerik; Pearson 2005
- [13] Lennart Rade, Bertil Westergren: Mathematics Handbook for Science and Engineering; Springer 2004
- [14] Cleve Moler: Numerical Computing with MATLAB; SIAM 2004 Society for Industrial and Applied Mathematics [www.mathworks.com/moler](http://www.mathworks.com/moler)
- [15] Cleve Moler, Charles Van Loan: Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix – Twenty-Five Years Later; SIAM REVIEW 2003 Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 45, No. 1, 46pp [www.cs.cornell.edu/cv/researchpdf/19ways+.pdf](http://www.cs.cornell.edu/cv/researchpdf/19ways+.pdf)
- [16] T. Dupont, J. Hoffman, C. Johnson, R. Kirby, M. Larson, A. Logg, R. Scott: The FEniCS project; preprint 2003-21, Chalmers Finite Element Center, Chalmers University of Technology, Göteborg Sweden 2003 [www.femcenter.org/pub/preprints/phiprint-2003-21.pdf](http://www.femcenter.org/pub/preprints/phiprint-2003-21.pdf)

- [17] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 1, 2, 3; Vieweg+Teubner 2007–2008
- [18] Thomas Risse: Addons zu Heath: Scientific Computing; [www.weblearn.hs-bremen.de/risse/MAI/docs/heath.pdf](http://www.weblearn.hs-bremen.de/risse/MAI/docs/heath.pdf)
- [19] Dieter Schott: Ingenieurmathematik mit MATLAB – Algebra und Analysis für Ingenieure; Fachbuchverlag Leipzig 2004

## A detaillierte Nachweise

Zitate sind *kursiv* gesetzt. Da wo vorliegend, gilt *richtig* statt *falsch*.

### A.1 Band 1 – Ableitungen und Geometrie im $\mathbb{R}^3$

S. 7 *Zirkel* statt *Kompaß*

**Kap 4, S. 38-49** führt top down gleich Ableitungen, Differentialgleichungen und Integrale/Stammfunktionen ein: der Leser muß allerdings schon wissen, daß *Geschwindigkeit = Ableitung des Weges nach der Zeit* ist, um aus  $x'(t) = f(t)$  zum einen  $x(t_n) \approx x(t_{n-1}) + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$  und so  $x'(t_{n-1}) \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}$  und zum anderen  $x(t_N) = \sum_{n=1}^N (x(t_n) - x(t_{n-1})) \approx \sum_{n=1}^N f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$  schließen zu können.

Im Vorübergehen werden Euler-Verfahren und implizites Verfahren zur check Lösung von Differentialgleichungen der (verallgemeinerten) Form  $x'(t) = f(x(t), t)$  gestreift. Der Spezialfall  $x'(t) = x(t)$  liefert immerhin die Exponentialfunktion und die Näherung  $e \approx (1 + \frac{1}{N})^N$  für ausreichend große  $N$ . Konvergenz wird in allen Fällen einfach unterstellt.

Das (Riemann-) Integral gewinnt man sogleich aus der Beobachtung  $n^2 = (2n - 1) + (2(n - 1) - 1) + \dots + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 1 - 1)$  bzw.

$$\begin{array}{rcl} n^2 + n & = & 2(n + (n - 1) + \dots + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k \\ \downarrow & = & = \downarrow \\ x^2 & = & = 2 \int_0^x y dy \end{array}$$

weil doch  $n$  gegenüber  $n^2$  vernachlässigbar ist.

Verallgemeinert liefert  $n^3 = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1)$  sogleich  $x^3 = 3 \int_0^x y^2 dy$  und damit speziell  $1 = 3 \int_0^1 y^2 dy$ .

S. 56 eine Aussage *impliziert* eine andere – ohne Definition/Erklärung

- S. 58 *Theoretisch gibt es natürlich kein größtes  $n \in \mathbb{N}$ , aber praktisch gilt  $n < 10^{100}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , was etwa in der Kryptographie so wohl nicht zutrifft.*
- S. 59 Sehr konstruktivistisch ist  $\mathbb{N}$  *schon möglich, aber eigentlich nicht existent!*
- S. 65 schwedisches Schema für Divisionen
- S. 71 Abb. 6.1: Der Domino-Effekt illustriert sehr hübsch Induktion.
- S. 89 *Dezimaldarstellung von  $q \in \mathbb{Q}$  ist periodisch!*
- S. 84, 85 'schwedisches' Dividieren mit Dezimalpunkten
- S. 111 Euklidische Ebene =  $\mathbb{Q}^2$
- S. 129  $H(t) = 50 - t^2$  m
- S. 138 Dezimal-Kommata
- S. 140, 148, 149 Dezimal-Punkte in den Beschriftungen der Achsen-ticks
- S. 156,157 'schwedisches' Dividieren
- S. 157 *...wobei  $g$  ein Polynom ist, das eine Ordnung kleiner ist als der Grad von  $f$ .*
- S. 182 Kommata vs Dezimalkommata
- S. 183 *Wir ordnen also die unendlich vielen Elemente in einer Folge zusammen und gelangen so von der Unendlichkeit zu einem.*
- S. 184 *Für uns als Mathematiker gibt es keinen Grund zu versuchen, so ehrlich wie möglich zu sein und Sprache so klar wie möglich einzusetzen.*
- S. 186 *Eine sehr qualitative Aussage ist notwendigerweise etwas vage.*
- S. 202 Maple liefert Dezimalkommata
- S. 209  $\sqrt{2}$  per Dekasektion
- S. 219 *wunder Punkt: es scheint sinnvoller zu sagen, daß wir nicht wissen können, ob  $x = 0$  oder  $x > 0$  ist, wenn man nicht alle Dezimalziffern kennt oder benennen kann.*

- S. 222 *Die Ecole Polytechnique in Paris ... wurde zu einem Modell für technische Universitäten in ganz Europa (Chalmers 1829 ...).*
- S. 223 ???
- S. 227 *Das führt uns zur Folgerung, daß alle Funktionen Lipschitz-stetig sind (mehr oder weniger).*
- S. 228 Dezimalkommata
- S. 228/229 *Es scheint so, daß wir die bloße Vorstellung einer diskontinuierlichen Funktion verwerfen müssen.*
- S. 229 *in den Sprungstellen statt bei den Sprüngen*
- S. 230 *Die Standarddefinition genügt einer Maximalitätsanforderung, leidet aber unter der (oft verwirrenden) Benutzung von Grenzwerten. ... Wo hingegen die Standarddefinition etwas weit hergeholt ist. Stimmt's?*
- S. 237 *Graph der implizit gegebenen Funktion  $S(0.002+2S)^2 - 1.57 \cdot 10^{-9} = 0$  statt Graph der Funktion  $S(0.002 + 2S)^2 - 1.57 \cdot 10^{-9}$*
- S. 247 *Eine Menge kann durch die Angabe aller ihrer Elemente beschrieben werden.*
- S. 252 *eine reelle Zahl kann durch ihre Dezimalentwicklung definiert werden. statt seine*
- S. 252 *Wir haben  $\mathbb{R}$  als die Menge aller möglichen unendlichen Dezimalentwicklungen definiert.*
- S. 254 *Also, was ist Ihre Meinung, Cantor oder Kronecker?*
- S. 255 *Wenn irrationale Zahlen bei praktischen Berechnungen nicht existieren, ist es dann wirklich sinnvoll, darüber nachzudenken, ob sie wirklich existieren?*
- S. 255 *Wir schlagen vor, die Menge aller reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als die Menge aller möglichen unendlichen Dezimalentwicklungen oder gleichbedeutend als die Menge aller möglichen Cauchy-Folgen rationaler Zahlen zu definieren.*
- S. 255 *Wir wissen, dass*

- S. 256 *Einige Menschen scheinen zu glauben, daß der Himmel existiert, wohingegen andere ihn als Möglichkeit oder als poetische Möglichkeit betrachten. statt es*
- S. 277 *konvergiert gegen  $1/3$ , den Fixpunkt statt dem*
- S. 283 *mit anwachsendem  $i!$  Anders ausgedrückt statt mit wachsendem  $i$ . – Fakultät ist hier nicht gemeint.*
- S. 284 *Wir suchen nun den Hauptnenner für die Brüche statt einen gemeinsamen Teiler*
- S. 286 *Zeichnen Sie eine Lipschitz-stetige Funktion  $g$ , für die nicht aus  $x \in [0, 1]$  folgt, daß  $g(x)$  in  $[0, 1]$  liegt.*
- S. 290 *die Länge der Diagonalen*
- S. 290 *Zirkel statt Kompaß*
- S. 296/297 *keine typographische Unterscheidung von Vektoren und Skalaren, weil es die Fantasie des Lesers anregt, sich die richtige Interpretation ... vorzustellen.*
- S. 297/298 *unglückliche Bezeichnungen: Kopf und Ende von Vektoren*
- S. 306 *Winkel AOB statt Winkel OAB*
- S. 319 *vgl. Abb. 20.28 – Verweis auf eine unpassende, ungeeignete Abbildung*
- S. 326 *ist es jedoch natürlich,  $x = (x_1, x_2)$  als Spaltenvektor zu betrachten.*
- S. 347 *Spat oder Parallelepipet statt schiefer Würfel*
- S. 353 *die in den Ebenen  $n_i \cdot x = d_i$  liegen statt in der Ebene  $n_i \cdot x = d_i$*
- S. 354 *Vektor  $\hat{x}$  finden können, so dass  $n_i \cdot \hat{x} = d_i$  statt  $n_i \cdot x = d_i$*
- S. 362, 365 *Spaltenvektoren  $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^\top$ ,  $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^\top$  und  $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^\top$  statt  $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$  und  $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$*
- S. 367  *$q_1, q_2, q_3$  ist orthogonale Basis, d.h. daß die  $q_j$  paarweise orthogonal sind und die Länge 1 haben.*

- S. 376 Beachten Sie, daß wir komplexe Zahlen als Skalare betrachten, obwohl sie viel mit Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  gemeinsam haben. Der Hauptgrund dafür ist, daß ...
- S. 393  $s(t) = 3 \times (2t - t^2)$  km. Dabei wird  $t$  in Stunden gemessen. Ihre Geschwindigkeit ist  $s'(t) = 6 - 6t$  km/Stunde zur Zeit  $t$ .
- S. 399 Das ist doch einfach, mein lieber Watson.
- S. 403 Hinweis: Schreiben Sie  $f(x_i) = f(0) + f'(0)x_i + E_f(x_i, 0)$  statt  $f(x_i) = f(0) + f'(x_i)x_i + E_f(x_i, 0)$ .
- S. 415-417  $x = f^{inv}(y)$  statt  $x = f^{-1}(y)$
- S. 436 Einmal ist  $u(x)$  die zugehörige Auslenkung in  $x$ . Danach ist die Dehnungskraft  $\sigma(x)$  proportional zur Auslenkung  $u'(x)$ .
- S. 440 ... da sich die Geschwindigkeit des austretenden Gases zur Zeit  $t$  von  $-u$  für  $t = 0$  zu  $v(t) = -u$  für  $t > 0$  verändert.

## A.2 Band 2 – Integrale und Geometrie im $\mathbb{R}^n$

- S. 472 Damit diese Diskussion Sinn ergibt ... statt macht
- S. 474 Es ist ansonsten keine gute Idee zu sagen, daß das Integral eine Fläche ist, allein schon deswegen, da das Integral vieles repräsentieren kann, wie einen Abstand, einen Geldbetrag, ein Gewicht oder etwas anderes.
- S. 475 Das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen zu definieren, ist sinnvoll, um Integrale von Funktionen mit mehreren Variablen zu definieren (sogenannte Mehrfachintegrale), da es für diese Verallgemeinerung keine zugrunde liegende Differentialgleichung gibt.
- S. 481 Sprünge aufzuweisen statt Sprünge zu besitzen
- S. 486 Wir beweisen zunächst, daß  $H'(x) = L'(x)$  gilt. Mit Hilfe von  $H(a) = L(a) = 0$  und der Eindeutigkeit des Integrals folgt dann (28.11). statt Um (28.11) zu zeigen, beweisen wir zunächst, daß  $H'(x) = L'(x)$  mit Hilfe von  $H(a) = L(a) = 0$  und der Eindeutigkeit des Integrals.
- S. 494  $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$  statt  $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2$
- S. 497  $\int_I (\bar{u}(x) - \int_I \bar{u}(y)\bar{v}(y) dy \bar{v}(x))^2 dx$  statt  $\int_I (\bar{u}(x) - \int_I \bar{u}(y)\bar{v}(y) dy \bar{v}(x)) dx$

- S. 502 *Schlau, oder?*
- S. 525 Abb 31.4 ist identisch mit Abb 31.5 trotz anderslautender Bildunterschriften
- S. 533 *Während der Bewegung des Körpers pendelt die Energie daher ... hin und zurück.*
- S. 537, 538  $x = f^{\text{inv}}(y)$  statt  $x = f^{-1}(y)$
- S. 539, 540  $x = f^{\text{inv}}(y) = \text{arsinh}(y)$  statt  $x = f^{-1}(y) = \text{arcsinh}(y)$
- S. 540  $x = f^{\text{inv}}(y) = \text{arcosh}(y)$  statt  $x = f^{-1}(y) = \text{arccosh}(y)$
- S. 540 *Impulsgleichgewicht bedeutet  $F_n \Delta y = \frac{1}{2} F_v(x + \Delta x) \Delta x + \frac{1}{2} F_v(x) \Delta x$*
- S. 542 Aufgabe 32.15 Berechnen Sie analytisch a)  $\arctan(\sqrt{2} - 1)$
- S. 542 Aufgabe 32.15 Berechnen Sie analytisch c)  $\arcsin \frac{1}{7} + \arcsin \frac{11}{4}$
- S. 547 *sondern modulo  $2\pi$  gleich ist*
- S. 550 Referenz *Mathematisches Handbuch für Wissenschaft und Ingenieurwesen* ohne Literaturhinweis, möglicherweise [13]
- S. 552, 553 Verwechslung von *Zähler* und *Nenner*
- S. 565 *Genial, oder?*
- S. 566 Der Begriff der *inhomogenen* Differentialgleichung ist nicht eingeführt.
- S. 567  $a_0 x^m + a_1 x(x^m)' + a_2 x^2(x^m)'' = (a_0 + ma_1 + a_2 m(m-1))x^m$  statt  $a_0 x^m + a_1 x(x^m)' + a_2 x^2(x^m)'' = (a_0 + (a_1 - 1)m + a_2 m^2)x^m$   
und daher auch  $a_0 + a_1 m + a_2 m(m-1) = 0$  statt  $a_0 + (a_1 - 1)m + a_2 m^2 = 0$
- Kap 36** Wie üblich ist  $\int_A^B f(x) dx := \lim_{a \rightarrow A, b \rightarrow B} \int_a^b f(x) dx$  definiert für  $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und/oder  $B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .
- S. 572 Der Integrand ist eine *glatte (positive) Funktion ...* ohne Definition von *glatt*
- S. 572  $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1+n) = +\infty$  für  $n \in \mathbb{N}$  (vgl. S. 573)
- S. 573  $\int_1^\infty \frac{dx}{xe^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{xe^x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{e^x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-n}) = e^{-1}$   
*Beachten Sie, daß wir  $n$  auf ganze Zahlen einschränken können, der der Integrand  $\frac{1}{xe^x}$  gegen Null strebt, wenn  $x$  gegen Unendlich strebt.*



- S. 575  $\int_B \|x\|^{-\alpha} dx$  für  $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$  mit  $d = 1, 2, 3$
- S. 579 *Somit haben wir die Konvergenz der Reihe auf die Konvergenz der Folge ihrer Teilsummen zurückgeführt. statt seiner*
- S. 583 *Die harmonische Reihe divergiert **theoretisch!***
- S. 585 *Die Reihe scheint auf dem Computer zu konvergieren, obwohl sie prinzipiell divergiert. Dies gibt uns eine Vorstellung von Idelismus versus Realismus in der Mathematik!*
- S. 585 *Die rückwärts berechnete Summe ist streng größer als die vorwärts berechnete Summe! im Widerspruch zu  $n = 100000$  und  $n = 2000000$*
- S. 587 *Beweisen Sie, daß die Reihe ... konvergiert. Hinweis: Vergleichen Sie sie mit einer Stammfunktion ... statt es*
- S. 587 *Beweisen Sie, daß die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2-i}$  konvergiert. Der erste Summand für  $i = 1$  ist aber nicht definiert!*
- S. 594  $2^n$  oder  $N$  statt  $2^N$
- S. 595  $\left| \int_o^x (f(u(y)) - f(v(y))) dy \right|$  statt  $|\int_o^x f(u(y)) - f(v(y)) dy|$
- S. 600, 603 Volterra-Lotka:  $a, b, \alpha$  und  $\beta$ , S. 600 vs  $a, b, c$  und  $d$ , S. 603
- S. 627  $f(x) = Ax$  statt  $f(x) = A$
- S. 645 *jede Spalte  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top$  statt  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$*
- S. 645 *Spaltenvektoren  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top$  statt  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$*
- S. 651 *Permutationen als eins zu eins Abbildungen ... ohne Definition*
- S. 657 *Spalten  $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top$  statt  $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$*
- S. 661  $|v - Pv|^2 \leq |v - Pv + \epsilon w|^2 = |v - Pv|^2 + 2\epsilon(v - Pv, w) + \epsilon^2|w|^2$  statt  $|v - Pv|^2 \leq |v - Pv + \epsilon w|^2 = |v - Pv|^2 + \epsilon(v - Pv, w) + \epsilon^2|w|^2$  sowie entsprechend  $(v - Pv, w) + \frac{1}{2}\epsilon^2|w|^2 \geq 0$  statt  $(v - Pv, w) + \epsilon^2|w|^2 \geq 0$
- S. 677 *Wir wissen aus dem Kapitel „Optimierung“, daß das Minimierungsproblem eine Lösung besitzt.*
- S. 683  $x_k = (b_k - \text{sum})/a_{kk}$  ausdrücken!
- S. 690 *Gibt es nur relativ wenige Diagonalen*

- S. 694 *Verhältnis des größten Eigenwerts zum kleinsten Eigenwert*
- S. 665  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b)$  statt  $x^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \alpha(Ax^{(k)} - b)$
- S. 696 *Da die  $\lambda_j$  positiv angenommen werden, ...*
- S. 702  $x^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j \neq i} a_{ij} x^{(k)} - b_i \right)$  statt  $x^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j \neq i} a_{ij} x^k - b_i \right)$   
wie ebenso in Abb. 44.13
- S. 706/707, 722  $x^{(k+1)}$ ,  $x^{(k)}$ ,  $d^{(k)}$ ,  $r^{(k+1)}$  und  $r^{(k)}$  statt  $x^{k+1}$ ,  $x^k$ ,  $d^k$ ,  $r^{k+1}$   
und  $r^k$
- S. 707 Das Skalar-Produkt wird mal als  $\langle x, y \rangle$ , mal als  $(x, y)$  geschrieben.
- S. 707,722  $\alpha_k = \frac{(r^k, d^k)}{(d^k, d^k)}$  und  $\beta_k = \frac{(r^{k+1}, d^k)}{(d^k, d^k)}$   
versus  $\alpha_k = \frac{(r^k, d^k)}{(d^k, Ad^k)}$  und  $\beta_k = \frac{(r^{k+1}, Ad^k)}{(d^k, Ad^k)}$  – beide Varianten anders als [9]
- S. 719 *Spalten  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top$  statt  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$*
- S. 726 *A nicht-normal ... ohne Definition (nicht-) normaler Matrizen*
- S. 737 *Wir laden den Leser ein, ... Newton nachzueifern.*
- S. 737, 738 *Gleichung für die Störung  $\varphi$ , deren Lösung statt dessen*
- S. 742 *wobei wir die Zeitabhängigkeit ... weggelassen haben, um die Lesbarkeit zu erhöhen.*
- S. 745  $\sum_{i,j=1}^N k_{ij} (|a_i + u_i - (a_j + u_j)| - |a_i - a_j|)^2 = \sum_{i,j=1}^N k_{ij} (|a_i - a_j + (u_i - u_j)| - |a_i - a_j|)^2$  statt  $\sum_{i,j=1}^N k_{ij} (|a_i + u_i - (a_j + u_j)| - |a_i - a_j|)^2 = k_{ij} (|a_i - a_j + (u_i - u_j)| - |a_i - a_j|)^2$
- Kap. 48** *Zeitskala meint wohl Zeitkonstante.*
- S. 750 *Differentialgleichung transformiert zu ... , deren Lösung statt dessen*
- S. 761, 762 *Drosseln oder Induktivitäten statt Schleifen*
- S. 775 *richtig?*
- S. 776 *(überprüfen Sie dies!)*
- S. 782  $(f - P_k f, v)$  für alle  $v \in V_h$
- S. 788 *von der beobachteten Größe genügend vorhanden statt die beobachtete Größe genügend vorhanden*

- S. 789 *zufällig auftretende* statt *auf tretenden*
- S. 789 *Fluß* wird einmal mit  $q(x, t)$  ein andermal mit  $\varphi(x, t)$  bezeichnet.
- S. 791 (53.10)  $u(0) = u(1) = 0$  statt  $u(0, t) = u(1, t) = 0$
- S. 792 *um  $u$  aus  $f$  zu erhalten* statt *um  $f$  aus  $u$  zu erhalten*
- S. 793 Lesehilfe bzgl.  $\varphi_0$  und  $\varphi_{M+1}$
- S. 796 Abb. 53.5 rechts:  $\varphi_i$  und  $\varphi_{i+1}$  statt  $\varphi_{i-1}$  und  $\varphi_i$
- S. 797 Positiv definite Matrizen sind invertierbar.
- S. 797 *Die Genauigkeit wächst, wenn der Aufwand wächst.*
- S. 799 Abb. 53.6 lieber als Gleichung  $A\xi = b$  darstellen
- S. 800 *setzt Kenntnisse ... voraus.*

### A.3 Band 3 – Analysis in mehreren Dimensionen

- S. 823 Lesehilfe für die Dekodierung der Schreibweise  $M(\bar{x})(x - \bar{x})$
- S. 834 *Welche Erleichterung!* (daß es den Satz von Schwarz gibt.)
- S. 836 *Wir wiederholen den Beweis dem Leser zuliebe.*
- S. 836 *Subtraktion* statt *Abziehen*
- S. 836 *konvergiert gegen* statt *zu*
- S. 838 *Achtung bei großen Lipschitz-Konstanten  $L_f$  !!*
- S. 838, 839  $x = f^{inv}(y)$  statt  $x = f^{-1}(y)$
- S. 838, 839, 840  $e^{(j)}$  statt  $e^j$
- S. 847 *Eine Höhenlinie kann man sich auch als Uferlinie eines (Stau-) Sees ... denken.*
- S. 851 *Rand des Einheitsquadrates* statt *Grenze*

This paper constructs and analyzes a model for the dynamic frictional contact between a viscoelastic body and a moving foundation. The contact involves wear of the contacting surface and the diffusion of the wear debris. The relationships between the stresses and displacements on the contact boundary are modeled by the normal compliance law and a version of the Coulomb law of dry... This paper is concerned with the bifurcation analysis of a pressurized electroelastic circular cylindrical tube with closed ends and compliant electrodes on its curved boundaries. The theory of small incremental electroelastic deformations superimposed on a finitely deformed electroelastic tube is used to determine those underlying configurations for which the superimposed *Angewandte Mathematik: Body and Soul: Analysis in Mehreren Dimensionen*, Volume 3. Kenneth Eriksson, Donald Estep, Claes Johnson. Download (pdf, 19.73 Mb) Donate Read. The workshop focuses on the mathematical and numerical analysis of PDEs with singularities in the form of irregular domains and small or nonsmooth model parameters. Typical applications include e.g. Maxwell equations, propagation of fracture or geometric irregularities like thin layers. Moreover, a mini-course on Elliptic PDEs on domains with corners for students, postdocs and anyone interested in the subject, will be delivered by G. Sweers (KU Leuven).